实数的康托尔构造在 Coq 中的形式化

第 35 期 PrP 结题答辩

周李韬

上海交通大学
电子信息与电气工程学院
F1803016

29 Sept 2019

Outline

1. 课题概述
2. 实数的定义
3. 实数的运算
4. 实数单元集到实数的单射
5. 实数的完备性

课题概述

课题概述

- 背景：Coq 是一种常见的形式化定理证明工具。
- 问题：实数在 Coq 中没有实现形式化的构造
- 目标：在 Coq 中用有理数柯西列等价类形式化地构造实数，证明完备性。
- 研究方法：
  - 将经典实数理论中的数学证明形式化
  - 针对 Coq 的特点构造更合适的定义和证明

有理数柯西列

Definition 1

对有理数列 $[a_n]_n$，如果 $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon >_{\mathbb{Q}} 0, \exists m \in \mathbb{N}$，使得 $\forall n_1, n_2 >_{\mathbb{N}} m, |a_{n_1} - a_{n_2}| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon$，则称 $[a_n]_n$ 是有理数柯西列.

有理数柯西列的形式化定义

```
Class Cauchy (CSeq : nat -> Q -> Prop) : Prop := {
  Cauchy_exists : forall (n:nat), exists (q:Q), (CSeq n q);
  Cauchy_unique : forall (n:nat) (q1 q2:Q), CSeq n q1 -> CSeq n q2 -> q1 == q2;
  Cauchy_proper : forall (p q: Q) n, p==q -> (CSeq n p -> CSeq n q);
  Cauchy_def : forall (eps:Q), eps > 0 -> (exists (n:nat), forall (m1 m2:nat),
      (m1 > n)%nat -> (m2 > n)%nat -> forall (q1 q2:Q), CSeq m1 q1 -> CSeq m2 q2
      -> Qabs (q1 - q2) < eps);
}.

Inductive Real : Type :=
| Real_intro (CSeq : nat -> Q -> Prop) (H: Cauchy CSeq).
```

实数等价关系

Definition 2 (有理数柯西列的等价)

对有理数柯西列 $[a_n]_n$,$[b_n]_n$，如果 $\lim_{n\to\infty}|a_n - b_n| =_{\mathbb{Q}} 0$，则称 $[a_n]_n$ 与 $[b_n]_n$ 等价。

实数等价的形式化定义

```
Definition Real_equiv (x1 x2 : Real) : Prop :=
  match x1, x2 with
  | Real_intro CSeq1 H1,Real_intro CSeq2 H2 =>
      forall (eps:Q), eps>0 -> (exists (n:nat), forall (m:nat), (m > n)%nat
         -> forall (q1 q2:Q), CSeq1 m q1 -> CSeq2 m q2 -> Qabs (q1 - q2) < eps)
  end.
```

实数加法的定义

Definition 3 (实数加法的数学定义)

对实数 $\{a_n\}_n$、$\{b_n\}_n$，定义 $\{a_n\}_n + \{b_n\}_n = \{a_n + b_n\}_n$。

实数加法的形式化定义

```
Definition CauchySeqPlus (A B: nat -> Q -> Prop): (nat -> Q -> Prop) :=
  fun (n:nat) (q:Q) =>  forall (q1 q2:Q), A n q1 -> B n q2 -> q == q1 + q2.

Theorem Cauchy_Plus_Cauchy: forall A B,
  Cauchy A -> Cauchy B  -> Cauchy (CauchySeqPlus A B).

Definition Rplus(a b : Real) : Real  :=
  match a with
  | (Real_intro A HA) => match b with
             | (Real_intro B HB) =>
               Real_intro (CauchySeqPlus A B) (Cauchy_Plus_Cauchy A B HA HB)
               end
  end.
```

更多定义和性质的形式化工作

实数的乘法

$\{a_n\}_n \times_{\mathbb{R}} \{b_n\}_n = \{a_n \times_{\mathbb{Q}} b_n\}_n$

实数的倒数

如果 $\{a_n\}_n \neq_{\mathbb{R}} 0$，$\frac{1}{\{a_n\}_n} = \{\frac{1}{a_n}\}_n$
注：Coq 有理数标准库中，0 的倒数被定义为 0。

实数的序关系

$\{a_n\}_n < \{b_n\}_n \iff \{b_n - a_n\}_n$ 是正实数
正实数这一性质可以在数学中用极限的语言描述。

实数的绝对值

$|\{a_n\}_n| = \{|a_n|\}_n$

实数的取下整函数

Definition 4 (实数的取下整关系)

定义二元关系 $\mathbf{L} = \{(\{a_n\}_n, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \mid z \leq_{\mathbb{R}} \{a_n\} \wedge z + 1 \geq_{\mathbb{R}} \{a_n\}\}$，记作 $\{a_n\}_n \mathbf{L} z$，表示 z 是实数 $\{a_n\}_n$ 的下整。

实数取下整关系满足函数性

```
Theorem Rfloor_exists: forall A:Real, exists z, Rfloor A z.
Theorem Rfloor_unique: forall (A:Real) (z1 z2:Z),
   Rfloor A z1 -> Rfloor A z2 -> z1 = z2.
Instance Rfloor_comp: Proper (Real_equiv ==> Z.eq ==> iff) Rfloor.
```

实数单元集到实数的单射，实数的完备性

Definition 5 (实数单元集到实数的单射)

对实数等价类 $[\{a_n\}_n]_{\mathbb{R}}$，令 $b_n = \frac{\lfloor a_n \cdot n \rfloor}{n}$，则有理数列 $\{b_n\}_n$ 是该等价类对应的实数。

Definition 6 (Coq 中实数柯西列的极限)

对实数列 $\{A_n\}_n$，构造有理数列 $\{a_n\}_n$，令

$$a_n = \frac{\lfloor A_n \cdot_{\mathbb{R}} n \rfloor}{n}$$

称 $\{a_n\}_n$ 为实数列 $\{A_n\}_n$ 的极限。

Summary

取得的成果

- Coq 中，一个从有理数构造的完备的实数公理库。
- 实数单元集到实数的函数单射，实现 Coq 中实数可计算函数的构造。

下一步工作

- 对实数构造理论中其他重要的定理进一步的形式化验证。
- 对本文所构造的实数的具体实现

Bibliography

[1] E. Hewitt.
Real and Abstract Analysis.Berlin,32-46
Heidelberg： Springer Berlin Heidelberg, 1965.

[2] 王建午, 曹之江, 刘景麟.
实数的构造理论,50–100,
北京: 人民教育出版社, 2000.

The End

Thanks!